

Ad Soyad:

Numara:

19.01.2020

İST.257 İLERİ MATEMATİK BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1. Aşağıdaki limitlerin doğruluğunu gösteriniz.

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^2} = 0$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 - x^2 y^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} = 2$

2.  $\alpha(t) = (\sin t)\vec{i} + t\vec{j} + (1 - \cos t)\vec{k}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  denklemiyle verilen eğri parçasının belirtilen aralıktaki uzunluğunu hesaplayınız.

3.  $z = x^n e^{-\frac{y}{x}}$  fonksiyonunun denklemini  $yz_{yy} = z_x - z_y$  sağlaması için  $n=?$

4. Beta fonksiyonundan yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta = ?$

b)  $\int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx = ?$

5. Eğer varsa  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

BAŞARILAR

Süre: 90 dk.

Dr. Öğr.Üyesi. Fatma GÜLER

$$1) a) \forall \varepsilon > 0 \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |x| < \delta, |y| < \delta$$

o.w.p

$$\left| \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq \frac{x^4 y^4}{x^4} = y^4 < \delta^4 = \varepsilon, \quad \delta = \sqrt[4]{\varepsilon}$$

$$b) \forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \delta, |y| < \delta \quad x^2 + y^2 \geq 2|x||y|$$

$$\left| \frac{2x^2 - x^2 y^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} - 2 \right| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 y^2}{2|x||y|} = \frac{|x||y|}{2}$$

$$< \frac{\delta^2}{2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{2\varepsilon}$$

$$2) \alpha'(t) = \cos t \vec{i} + \vec{j} + \sin t \vec{k}$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + 1 + \sin^2 t} = \sqrt{2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi$$

$$3) z_x = nx^{n-1} e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x^2} x^n e^{-\frac{y}{x}}$$

$$z_y = -x^n \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{y}{x}}$$

$$z_{yy} = x^n \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{y}{x}}$$

$$y^2 y'' = 2x - 2y$$

$$\Rightarrow y \cdot x^n \frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x}} = n x^{n-1} e^{-\frac{y}{x}} + \frac{1}{x^2} x^n e^{-\frac{y}{x}} + x^n \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}}$$

$$y \cdot x^n \frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x}} = x^n e^{-\frac{y}{x}} \left( \frac{1}{x} \cdot n + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{x} = 0 \Rightarrow n = -1$$

4) a)  $2x-1=4 \quad x=\frac{5}{2}, \quad 2y-1=9 \quad y=3$

$$B\left(\frac{5}{2}, 3\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+3\right)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(3)}{2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{8}{315}$$

b)  $x=t$  and  $\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = B(x, y)$

$$x-1=2 \quad y-1=3 \quad x=3 \quad y=4$$

$$B(3, 4) = \frac{\Gamma(3) \Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{2! 3!}{6!} = \frac{2 \cdot 3!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{1}{60}$$

$$5) \quad f_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad x^2 = y$$

$$f_y = 3y^2 - 3x = 0, \quad y^2 = x$$

$$y = y^4 \quad y^4 - y = 0 \quad y^2 = 1 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

Kritik noktalar  $(0,0)$   $(1,1)$

$$f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = 6y \quad f_{xy} = -3$$

$(0,0)$  noktası için

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -9 < 0 \quad \text{eğer noktası}$$

$(1,1)$  noktası için

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 27 > 0 \quad \text{ve } f_{xx} > 0 \quad \text{yerel min noktası}$$

Yerel min değeri  $f(1,1) = -1$  dir.